

Limita a spojitost funkce

1. Příklad Spočítejte tyto zcela triviální limity (načrtněte si předem graf $f(x)$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

pro následující funkce:

- a) $f(x) = x^2$;
- b) $f(x) = \frac{1}{x}$;
- c) $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

2. Příklad Vypočítejte

- a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$;
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x$.

3. Příklad Vypočítejte následující triviální limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$; *Výsledek:* limita neexistuje.
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$; *Výsledek:* 0.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x$; *Výsledek:* $\frac{\pi}{2}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$; *Výsledek:* $-\frac{\pi}{2}$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x$; *Výsledek:* 0.
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x$; *Výsledek:* π .
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{-x}$; *Výsledek:* 1.
- h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi^{-x}$; *Výsledek:* 0.
- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x^2$; *Výsledek:* ∞ .
- j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log |x|$; *Výsledek:* $-\infty$.

4. Příklad Rychle vypočítejte následující limity (limity spočítejte zdravým rozumem, tj. bez l' Hospitalova pravidla).

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$; *Výsledek:* 4.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$; *Výsledek:* $\frac{3}{4}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$; *Výsledek:* 1.
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$; *Výsledek:* ∞ .
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+3}{x^3-8x+5}$; *Výsledek:* 0.
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x$; *Výsledek:* 1.
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; *Výsledek:* $\frac{1}{2}$.
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$; *Výsledek:* ∞ .
- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$; *Výsledek:* 2.
- j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$; *Výsledek:* $\frac{1}{2}$.
- k) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; *Výsledek:* -2.
- l) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; *Výsledek:* $-\frac{1}{56}$.
- m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$; *Výsledek:* $\frac{3}{4}$.
- n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$; *Výsledek:* 1.

o)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}};$	Výsledek: 0.
p)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}};$	Výsledek: $\frac{3}{2}$.
q)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^{x^2};$	Výsledek: 0.
r)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$	Výsledek: $\frac{1}{2}$.
s)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 x}{x};$	Výsledek: 0.
t)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2};$	Výsledek: 1.
u)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2};$	Výsledek: 0.
v)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x};$	Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
w)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2 + 1} + \frac{x}{\sin x} \right);$	Výsledek: 4.
x)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x};$	Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
y)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{2}{x^2} \right);$	Výsledek: $-\infty$.
z)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right);$	Výsledek: $\frac{\pi}{2}$.
aa)	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right);$	Výsledek: $-\frac{\pi}{2}$.
bb)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 x}{e^{-\frac{1}{x}}};$	Výsledek: ∞ .
cc)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x};$	Výsledek: 1.
dd)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$	Výsledek: 3.
ee)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x};$	Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
ff)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$	Výsledek: $\frac{1}{2}$.
gg)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x};$	Výsledek: $\frac{3}{5}$.
hh)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$	Výsledek: $\frac{1}{2}$.
ii)	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x};$	Výsledek: 1.
jj)	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x);$	Výsledek: 3.
kk)	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x});$	Výsledek: 1.
ll)	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$	Výsledek: 0.
mm)	$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3});$	Výsledek: 0.
nn)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1};$	Výsledek: ∞ .
oo)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1};$	Výsledek: ∞ .
pp)	$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$	Výsledek: ∞ .
qq)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$	Výsledek: $\frac{4}{3}$.
rr)	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2};$	Výsledek: 12.
ss)	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1};$	Výsledek: $-\infty$.

5. Příklad Ukažte, že následující rovnice má řešení a nalezněte nějaký interval, který toto řešení obsahuje. (Nápověda: řešte metodou půlení intervalů.)

- a) $\sqrt{x^4 + 1} \cdot \ln(x^2 + 3) - \frac{e^x}{1 + \sin^2 x} = 3$
b) $e^x - 6x = 3$.

6. Příklad Udejte příklad dvou funkcí nespojitých v bodě 0, jejichž součet je funkce spojitá v bodě 0.

7. Příklad Udejte příklad funkcí $f(x)$ a $g(x)$, které jsou nespojité, zatímco složená funkce $f[g(x)]$ je spojitá.